αξία
ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Προτεινόμενες Λύσεις Μαθηματικών Προσανατολισμού Γ' Λυκείου 03/06/2026.

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 133

Α2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 51

Α3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 185

Α4. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Λάθος

αξία

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=2\ln(x-1)$, $x>1$ και $g(x)=\sqrt{x-2}+1$, $x\geq 2$

$D_h=D_{f\circ g}=\{x\in D_g \text{ και } g(x)\in D_f\}$

$\boxed{x\geq 2}$ και $\sqrt{x-2}+1>1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow \boxed{x>2}$

Άρα $D_h=D_{f\circ g}=(2,+\infty)$.

$h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=2\ln(g(x)-1)=2\ln(\sqrt{x-2}+1-1)$
$=2\ln(\sqrt{x-2})=\ln(\sqrt{x-2})^2=\ln(x-2)$

Άρα $h(x)=(f\circ g)(x)=\ln(x-2)$, με $x\in(2,+\infty)$.

Β2. $h(x)=\ln(x-2)$, $x>2$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο D_h με $h'(x)=\frac{1}{x-2}>0$ για $x>2$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο D_h, επομένως 1-1 και αντιστρέψιμη.

Για κάθε $x>2$, $h(x)=y \Leftrightarrow \ln(x-2)=y \Leftrightarrow x-2=e^y$
$\Leftrightarrow x=e^y+2$

Για $x>2$, $e^y+2>2 \Leftrightarrow e^y>0 \Leftrightarrow y\in\mathbb{R}$

Άρα $h^{-1}(x)=e^x+2$, $x\in\mathbb{R}$.

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

Β3. $\lim\limits_{x\to 2}\left[h(x)\cdot \dfrac{f(x)}{x-2}\right] = \lim\limits_{x\to 2^+}\left[\ln(x-2)\cdot \dfrac{2\ln(x-1)}{x-2}\right] = -\infty$,

διότι

- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2\ln(x-1)}{x-2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2}{x-1} = \dfrac{2}{1} = 2 > 0$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln(x-2) \xrightarrow[\substack{x\to 2^+ \\ y\to 0^+}]{\text{θέτω } x-2=y} \lim\limits_{y\to 0^+}(\ln y) = -\infty$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. i) Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της C_f στο $O(0,0)$

άρα $f(0)=0$ και $f'(0)=1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $D_f=\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{(3\kappa x^2+\mu)(x^2+1) - (\kappa x^3+\mu x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

άρα $f'(0)=\mu$ επομένως $\boxed{\mu = 1}$

Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$, άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

$$L = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx^3+x}{x^2+1}$$

• Αν $k>0$ τότε $L = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(kx) = +\infty$. Άτοπο.

• Αν $k<0$, τότε $L = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{kx^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}(kx) = -\infty$ Άτοπο

• Αν $k=0$ τότε $L = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Άρα για $\boxed{k=0}$, η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$..

Γ2. i) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x\cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

• $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}=0 \Leftrightarrow -x^2+1=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

• $f'(x)>0 \Leftrightarrow -x^2+1>0$, διότι $(x^2+1)^2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2<1 \Leftrightarrow |x|<1 \Leftrightarrow -1<x<1$

• $f'(x)<0 \Leftrightarrow -x^2+1<0 \Leftrightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	Ο.Μ.	$\searrow$	

f συνεχής στο $D_f=\mathbb{R}$
$f'(x)>0$ στο $(-1,1)$
$f'(x)<0$ στα $(-\infty,-1)$, $(1,+\infty)$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,-1]$, $[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$.

Στη θέση $x_1=-1$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το $f(-1)=-\frac{1}{2}$

Στη θέση $x_2=1$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το $f(1)=\frac{1}{2}$.

ii) Η f στο $\Delta_1=(-\infty,-1]$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

άρα $f(\Delta_1)=\left[f(-1),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{2},0\right)$

διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

Η f στο $\Delta_2=(-1,1]$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα

άρα $f(\Delta_2)=\left(\lim\limits_{x\to-1^+}f(x),f(1)\right]=\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$

διότι $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{x}{x^2+1}=-\frac{1}{2}$.

Η f στο $\Delta_3=(1,+\infty)$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα

άρα $f(\Delta_3)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\right)=\left(0,\frac{1}{2}\right)$

διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$.

Επομένως $f(\Delta)=f(\Delta_1)\cup f(\Delta_2)\cup f(\Delta_3)\Rightarrow f(\Delta)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

- $f(x)=\frac{1}{2}+\alpha^2$

Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει $\alpha^2\geq0\Leftrightarrow\alpha^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $\alpha=0$.

Αν $\alpha=0$, τότε η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$ έχει μοναδική ρίζα, αφού $\frac{1}{2}\in f(\Delta_2)$ και f γνησίως αύξουσα στο Δ_2.

- Αν $\alpha \neq 0$, τότε $\alpha^2+\frac{1}{2} > \frac{1}{2}$, άρα η εξίσωση $f(x)=\alpha^2+\frac{1}{2}$ δεν έχει λύσεις αφού $(\alpha^2+\frac{1}{2}) \notin f(\Delta)$.

Γ3. i) $I_\nu = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx$

Θέτω όπου ν το ν+1, άρα $I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2(\nu+1)+1}}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx$

Επομένως $I_\nu + I_{\nu+1} = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}}{x^2+1}\,dx + \int_0^1 \frac{x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}+x^{2\nu+3}}{x^2+1}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^{2\nu+1}(1+x^2)}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 x^{2\nu+1}\,dx$$

$$= \left[\frac{x^{2\nu+2}}{2\nu+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2\nu+2}$$

ii) $I_0 = \int_0^1 \frac{x^{2\cdot 0+1}}{x^2+1}\,dx = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$

άρα $\boxed{I_0 = \frac{\ln 2}{2}}$ Από Γ3 i) $I_\nu + I_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+2}$ (1)

Στην (1) για $\nu=0$ έχουμε $I_0 + I_1 = \frac{1}{2\cdot 0+2} \Leftrightarrow$

$\frac{\ln 2}{2} + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow I_1 = \frac{1}{2} - \frac{\ln 2}{2} \Leftrightarrow \boxed{I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}}$

Στην (1) για $\nu=1$ έχουμε:

$$I_1+I_2=\frac{1}{4} \iff I_2=\frac{1}{4}-I_1 \iff I_2=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{\ln 2}{2}$$

$$\iff \boxed{I_2=\frac{2\ln 2-1}{4}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε συνάρτηση $K(x)=g(x)+x$, $x\in\mathbb{R}$

- Η K είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως άθροισμα συνεχών

$K(-1)=g(-1)-1<0$, διότι $0<g(x)<1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$K(0)=g(0)>0$

- άρα $K(-1)\cdot K(0)<0$

Επομένως από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $K(x_1)=0$.

* Η K είναι παραγωγίσιμη με $K'(x)=g'(x)+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Επιπλέον, η K' είναι συνεχής, αφού g' συνεχής, άρα η K' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

Επομένως η K είναι γνησίως μονότονη, άρα και 1-1 οπότε η ρίζα $x_1\in(-1,0)$ της $K(x)=0$ είναι μοναδική.

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-1,0)$ ώστε $g(x_1)+x_1=0$

Δ2. Εφόσον f παραγωγίσιμη στο $D_f=(-\infty,\frac{\pi}{2})$ θα είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$, επομένως

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\in\mathbb{R}. \quad (1)$$

• $$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2(g(x)+x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}x(g(x)+x)=0$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-k\cdot x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\left(2\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}-k\right)$$

$$=2+1\cdot 1-k=3-k$$

Επομένως από (1) $3-k=0 \Leftrightarrow \boxed{k=3}$

Δ3. i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\frac{\pi}{2})$

$$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x-3\sigma\upsilon\nu x+1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

$$f'(x)=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu x-1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)^2(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$$

για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})$, αφού στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2})$ έχουμε $0<\sigma\upsilon\nu x<1$

Επιπλέον, f συνεχής στο $[0,\frac{\pi}{2})$ άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2})$. Άρα $0\le x<\frac{\pi}{2} \overset{f\uparrow}{\Longleftrightarrow} f(x)\ge f(0)=0$.

ii) Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2})$ άρα

$$f\left([0,\tfrac{\pi}{2})\right)=\left[f(0),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)\right)=[0,+\infty)$$

Διότι:

- $f(0)=0$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)=+\infty$

αφού $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(2\eta\mu x-3x)=2\cdot 1-3\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{4-3\pi}{2}$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\varepsilon\varphi x=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left(\eta\mu x\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)=+\infty$

εφόσον $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\eta\mu x=1>0$

$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\sigma\upsilon\nu x=0$ και $\sigma\upsilon\nu x>0$ κοντά στο $\frac{\pi}{2}^-$

άρα $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$.

$\frac{\pi}{3}\in f\left([0,\frac{\pi}{2})\right)$ και f γνησίως αύξουσα στο $[0,\frac{\pi}{2})$

άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in[0,\frac{\pi}{2})$ τέτοιο ώστε

$f(x_2)=\frac{\pi}{3}\Leftrightarrow 3f(x_2)=\pi$

Επομένως η εξίσωση $3f(x)=\pi$ έχει μοναδική ρίζα x_2.

Αφού $f(0)=0$ τελικά $x_2\in(0,\frac{\pi}{2})$

Δ4. i) Η συνάρτηση k είναι συνεχής στο $[x_1, 0]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1, 0)$ με $k'(x) = g'(x) + 1$.

Άρα από Θεώρημα Μέσης Τιμής, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, 0)$ ώστε $k'(\xi) = \dfrac{k(0) - k(x_1)}{0 - x_1} = \dfrac{g(0) - 0}{-x_1}$

$$\Leftrightarrow k'(\xi) = \frac{g(0)}{-x_1} > 0$$

Από Δ1. γνωρίζουμε ότι η k' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Επομένως $k'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα k γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x \in [x_1, 0]$ έχουμε: $x_1 \le x \le 0 \overset{k \uparrow}{\Longleftrightarrow} k(x) \ge k(x_1) = 0$

$$\Longleftrightarrow x^2 k(x) \ge 0 \Leftrightarrow f(x) \ge 0.$$

ii) $E(\Omega) = \displaystyle\int_{x_1}^{f(x_2)} |f(x)|dx \overset{\Delta 3\, ii}{=\!=\!=} \int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} |f(x)|dx.$

Από Δ3 i και Δ4 i, $f(x) \ge 0$, για κάθε $x \in [x_1, \frac{\pi}{3}]$

άρα $E(\Omega) = \displaystyle\int_{x_1}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_{x_1}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx.$

Αφού ο άξονας $y'y$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία θα ισχύει $\displaystyle\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx$ (2)

• $\int_0^{\frac{\pi}{3}} f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(2\eta\mu x + \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - 3x\right)dx$

$= \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - \frac{3}{2}x^2\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$= -1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} - (-2 - 0 - 0) = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \quad (3)$

• $\int_{x_1}^{0} f(x)dx = \int_{x_1}^{0} x^2(g(x)+x)\,dx = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \int_{x_1}^{0} x^3 dx$

$= \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx + \left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = \int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx - \frac{x_1^4}{4} \quad (4)$

Η (2) με χρήση των (3) και (4) γράφεται

$\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx - \frac{x_1^4}{4} = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} \Leftrightarrow$

$\int_{x_1}^{0} x^2 g(x)\,dx = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4} \quad (5)$

Άρα $\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)\,dx = \left[x^3 g(x)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} 3x^2 g(x)\,dx \overset{(5)}{=}$

$= -x_1^3 g(x_1) - 3\left(1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + \frac{x_1^4}{4}\right)$

$\overset{\Delta 1}{=} -x_1^3(-x_1) - 3 - 3\ln 2 + \frac{\pi^2}{2} - \frac{3x_1^4}{4}$

$= \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3.$