

Η εξεταζόμενη ύλη είναι: συναρτήσεις, όριο, συνέχεια, παράγωγος, εφαπτομένη, ρυθμός μεταβολής, Θ. Rolle, Θ.Μ.Τ., κανόνες DLH και ασύμπτωτες.

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες σ' ένα σημείο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

(Μονάδες 5)

A2. Να διατυπώσετε το **Θεώρημα Rolle** και κάνοντας το κατάλληλο σχήμα να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

(Μονάδες 4)

A3. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι **κατακόρυφη ασύμπτωτη** της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

(Μονάδες 3)

A4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει:

$$f'(x) = ax^{a-1}, x \in (0, +\infty)$$

Για ποιες τιμές του a η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο 0 ;

(Μονάδες 4+1)

A5. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λανθασμένη (Λ) κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις:

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα $y'y$, της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Σ Λ

β) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$. Τότε το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g \circ f$ είναι:

$$D_{g \circ f} = \{x \in B | f(x) \in A\}$$

Σ Λ

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha)), B(\beta, f(\beta))$ έχει κλίση λ , τότε υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε: $f'(\xi) = \lambda$.

Σ Λ

δ) Η γραφική παράσταση οποιασδήποτε συνάρτησης που ορίζεται στο $\mathbb{R}$ δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Σ Λ

(Μονάδες 2x4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(\ln x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1, \quad x > 0$$

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - x - 1, x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 4)

B2. Να βρείτε τις ρίζες και τα πρόσημα της f .

(Μονάδες 5)

B3. Να λύσετε την ανίσωση:

$$e^{-x^2} - x^2 < \frac{1}{e} - 1$$

(Μονάδες 5)

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 3+3)

B5. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = f'(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την g^{-1} .

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ Γ

Για τη **συνεχή** συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

• $g(-4) = -3, \quad g(4) = 5$

• $|g(x) - x| = \frac{x^2}{16}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$

Γ1. α) Να δείξετε ότι $g(x) = x + \frac{x^2}{16}, \quad x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g που είναι **κάθετη** στην ευθεία $\eta: y = x + 2026$.

(Μονάδες 5+4)

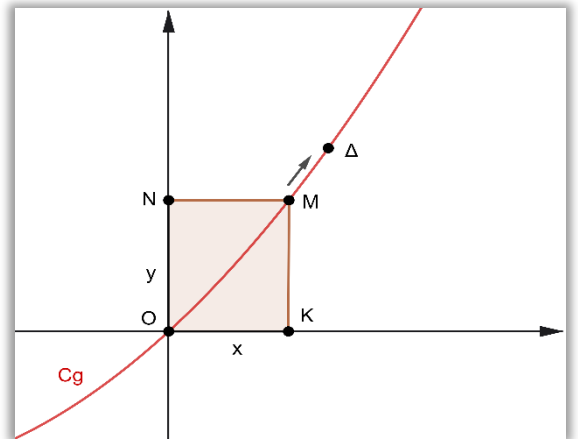
Γ2. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σημείο M βρίσκεται στην αρχή $O(0,0)$ των αξόνων και αρχίζει να κινείται πάνω στην C_g . Δίνεται ότι για $t \geq 0$ η τετμημένη x του M μεταβάλλεται με σταθερό ρυθμό:

$$\frac{dx}{dt} = 1 \text{ cm/sec}$$

Όταν το M διέρχεται από το σημείο $\Delta(4,5)$, να βρείτε:

α) Τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y του M ως προς τον χρόνο.

β) Τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E του ορθογωνίου $OKMN$ ως προς τον χρόνο.



(Μονάδες 3+3)

Γ3. Δίνεται και η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} g(0), & x = 0 \\ (e^x - 1)\ln x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής.

β) Να δείξετε ότι:

➤ για τη συνάρτηση:

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{x - 2026}, \quad x \in [0, 1]$$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[0, 1]$ και

➤ υπάρχει τουλάχιστον μια εφαπτομένη της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $\Sigma(2026, 0)$.

(Μονάδες 4+3+3)

ΘΕΜΑ Δ

Για τους θετικούς αριθμούς α, β και την συνάρτηση:

$$g(x) = \alpha - 1 + \frac{\ln x}{x - \beta}, \quad 0 < x < \beta$$

ισχύουν τα παρακάτω:

- $\beta \geq 2$ και η C_g τέμνει τον άξονα x 'ς στο σημείο $A(1,0)$
- η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_g

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$.

(Μονάδες 1+4)

Δ2. Αν επιπλέον η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη και η g^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, τότε να δείξετε ότι:

α) η εφαπτομένη ε της $C_{g^{-1}}$ στο σημείο $B(0, g^{-1}(0))$ έχει εξίσωση: $y = -x + 1$

β) η ευθεία ε εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$h(x) = e^{-x} + x^2, x \in \mathbb{R}$$

(Μονάδες 5+5)

Δίνεται, τέλος, και η συνάρτηση: $f(x) = xg(x), x \in (0, 2)$

Δ3. Να υπολογίσετε την παράγωγο της f και να λύσετε την εξίσωση: $f'(x) = -1$.

(Μονάδες 5)

Δ4. Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα και $1 < x_1 < e < x_2 < e^2$, τότε να δείξετε ότι:

$$\ln x_2 f(\ln x_1) - \ln x_1 f(\ln x_2) < f(\ln x_1) - f(\ln x_2)$$

(Μονάδες 5)

Καλή Ειδική !

(*) Το παρόν κριτήριο εξέτασης συντάχθηκε από την ομάδα διδασκόντων του Τομέα Μαθηματικών του Φροντιστηρίου αξία και αποτελεί πνευματική τους ιδιοκτησία. Η χρήση του εκτός Φροντιστηρίου, επιτρέπεται μόνο για εκπαιδευτικούς σκοπούς. Οποιαδήποτε άλλη χρήση ή αναπαραγωγή χωρίς άδεια, μπορεί να επιφέρει τις προβλεπόμενες από το Νόμο κυρώσεις.