

2^ο ΚΡΙΤΗΡΙΟ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111 .

A2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 128 .

A3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 161 .

A4. Σχολικό βιβλίο σελίδα 116.

A5. $\alpha=\Lambda$, $\beta=\Lambda$, $\gamma=\Sigma$, $\delta=\Lambda$

ΘΕΜΑ Β

B1. Για κάθε $x \in (0, +\infty)$, είναι

$$f(\ln x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 \quad (1)$$

Θέτουμε $\ln x = u \Leftrightarrow x = e^u$, με $x \in (0, +\infty)$ και $u \in \mathbb{R}$ και η (1) γίνεται:

$$f(u) = \frac{1}{e^u} - u - 1, u \in \mathbb{R}$$

Τελικά

$$f(x) = e^{-x} - x - 1, x \in \mathbb{R}$$

B2. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$, έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow -x_1 - 1 > -x_2 - 1$$

Προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $f(x_1) > f(x_2)$, άρα η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.

Επομένως είναι 1-1 και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν τα εξής:

- $f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0) \xrightarrow{f^{-1}} x = 0$
- $f(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \xrightarrow{f^{-1}} x < 0$
- $f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \xrightarrow{f^{-1}} x > 0$

Άρα ισχύει ο πίνακας προσήμων:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+$	$\circ$	$-$

B3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$e^{-x^2} - x^2 < \frac{1}{e} - 1 \Leftrightarrow$$

$$e^{-x^2} - x^2 - 1 < \frac{1}{e} - 1 - 1 \Leftrightarrow$$

$$f(x^2) < f(1) \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow}$$

$$x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ή } x > 1$$

Τελικά οι λύσεις της ανίσωσης είναι: $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

B4. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι **συνεχής** σ' αυτό, ως σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων. Επομένως η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Αναζητούμε ασύμπτωτες στα άκρα του $\mathbb{R}$, δηλαδή στο $-\infty$ και το $+\infty$.

Στο $-\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x} - x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{e^{-x}}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right] = -\infty$$

Διότι:

στο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x}$ θέτουμε $u = -x$, με $u \rightarrow +\infty$ καθώς $x \rightarrow -\infty$ και

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{-u} \stackrel{\substack{\infty \\ DLH}}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{-1} = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-1 - \frac{1}{x} \right] = -1 - 0 = -1$

Επομένως η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$.

Στο $+\infty$ έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} - x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{xe^x} - 1 - \frac{1}{x} \right] = 0 - 1 - 0 = -1 \in \mathbb{R}$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [xe^x] = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Επιπλέον

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-1x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} - x - 1 + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{e^x} - 1 \right) = 0 - 1 = -1 \in \mathbb{R}$$

Επομένως η ευθεία $y = -x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

B5. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με

$$f'(x) = (e^{-x} - x - 1)' = -e^{-x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Άρα

$$g(x) = -e^{-x} - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, με $g(x_1) = g(x_2)$, έχουμε:

$$-e^{-x_1} - 1 = -e^{-x_2} - 1 \Leftrightarrow -e^{-x_1} = -e^{-x_2} \Leftrightarrow e^{-x_1} = e^{-x_2} \xLeftrightarrow{e^x: 1-1} -x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η g είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.

Θέτουμε $g(x) = y$, με $x \in \mathbb{R}$ και έχουμε:

$$\begin{cases} -e^{-x} - 1 = y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -e^{-x} = y + 1 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x} = -1 - y \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $e^{-x} > 0 \Leftrightarrow -1 - y > 0 \Leftrightarrow y < -1$, άρα το σύστημα γίνεται:

$$\begin{cases} e^{-x} = -1 - y \\ x \in \mathbb{R}, y < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x = \ln(-1 - y) \\ y < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\ln(-1 - y) \\ y < -1 \end{cases}$$

Άρα $g^{-1}(y) = -\ln(-1 - y), y < -1$

Τελικά:

$$g^{-1}(x) = -\ln(-1 - x), x < -1$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.α) Δίνεται ότι:

$$|g(x) - x| = \frac{x^2}{16}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση:

$$h(x) = g(x) - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

η οποία είναι **συνεχής** στο $\mathbb{R}$, ως διαφορά συνεχών, και η (1) γίνεται:

$$|h(x)| = \frac{x^2}{16}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (2)$$

Βρίσκουμε τώρα τις **ρίζες** της συνάρτησης h

$$h(x) = 0 \Leftrightarrow |h(x)| = 0 \stackrel{(2)}{\Leftrightarrow} \frac{x^2}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι **η συνάρτηση h είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ άρα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από αυτά.**

Το $-4 \in (-\infty, 0)$ και $h(-4) = g(-4) + 4 = -3 + 4 = 1 > 0$ επομένως

- $h(x) > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$

Το $4 \in (0, +\infty)$ και $h(4) = g(4) - 4 = 5 - 4 = 1 > 0$ επομένως

- $h(x) > 0$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Επιπλέον

- $h(0) = 0$

Άρα $h(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η (2) γράφεται

$$h(x) = \frac{x^2}{16} \Leftrightarrow g(x) - x = \frac{x^2}{16} \Leftrightarrow g(x) = \frac{x^2}{16} + x$$

Τελικά

$$g(x) = \frac{x^2}{16} + x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Γ1.β) Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική, με

$$g'(x) = \frac{x}{8} + 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η εφαπτομένη ε της C_g στο σημείο $A(x_0, g(x_0))$ έχει κλίση:

$$\lambda_\varepsilon = g'(x_0) = \frac{x_0}{8} + 1$$

Η ευθεία ε είναι **κάθετη** στην ευθεία η αν και μόνο αν:

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\eta = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{x_0}{8} + 1\right) \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \frac{x_0}{8} + 1 = -1 \Leftrightarrow \frac{x_0}{8} = -2 \Leftrightarrow x_0 = -16$$

Είναι $g(-16) = 0$ και $g'(-16) = -1$, άρα η ζητούμενη ευθεία έχει εξίσωση:

$$y - g(-16) = g'(-16)(x + 16) \Leftrightarrow$$

$$y - 0 = -1(x + 16) \Leftrightarrow$$

$$y = -x - 16 \quad (\varepsilon)$$

Γ2.α) Το σημείο $M(x, y)$ κινείται στην C_g και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό:

$$\frac{dx}{dt} = x'(t) = 1 \frac{cm}{sec}$$

Η τεταγμένη του M είναι:

$$y = g(x) = \frac{x^2}{16} + x$$

Το x μεταβάλλεται με το χρόνο t άρα και το y μεταβάλλεται με το χρόνο t και ισχύει:

$$y(t) = \frac{1}{16}x^2(t) + x(t), \quad t \geq 0$$

Για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \geq 0$, έχουμε:

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = \frac{1}{8}x(t)x'(t) + x'(t)$$

Τη χρονική στιγμή $t = t_1$ που το M διέρχεται από το σημείο $\Delta(4,5)$ θα είναι

$$x(t_1) = 4, y(t_1) = 5, x'(t_1) = 1$$

Άρα

$$y'(t_1) = \frac{1}{8}x(t_1)x'(t_1) + x'(t_1) = \frac{4}{8} + 1 = 1,5 \text{ cm/sec}$$

Γ2.β) Το **εμβαδόν** του ορθογωνίου είναι

$$E = (OKMN) = |x| \cdot |y| = |xy|$$

Όταν το M είναι **κοντά** στο $\Delta(4,5)$ είναι $x, y > 0$, επομένως:

$$E = xy$$

Αφού τα x, y μεταβάλλονται με το χρόνο έχουμε:

$$E(t) = x(t)y(t) = \frac{1}{16}x^3(t) + x^2(t)$$

Ο ρυθμός μεταβολής του E ως προς τον χρόνο t είναι:

$$\frac{dE}{dt} = E'(t) = \frac{3}{16}x^2(t)x'(t) + 2x(t)x'(t)$$

και τη χρονική στιγμή $t = t_1$ είναι:

$$E'(t_1) = \frac{3}{16}x^2(t_1)x'(t_1) + 2x(t_1)x'(t_1) = \frac{3}{16} \cdot 4^2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot 1 = 3 + 8 = 11 \text{ cm}^2/\text{sec}$$

Γ3.α) Είναι $g(0) = 0$ άρα

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ (e^x - 1)\ln x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

➤ Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1)\ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{(e^x - 1)}{x} (x \ln x) \right] = 1 \cdot 0 = 0 = f(0) \quad (I)$$

Διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(e^x - 1)}{x} \stackrel{o/o}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

➤ Επιπλέον η f είναι **συνεχής στο $(0, 1]$** , ως πράξεις συνεχών (II)

Από τις (I), (II) προκύπτει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$.

Γ3.6) Η συνάρτηση Φ ικανοποιεί τις υποθέσεις του ϑ . Rolle στο $[0,1]$ αφού

- είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πηλίκο συνεχών
- είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με $\Phi'(x) = \frac{f'(x)(x-2026)-f(x)}{(x-2026)^2}$
- $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$.

Επομένως θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$, ώστε

$$\Phi'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi)(\xi - 2026) - f(\xi) = 0 \quad (3)$$

Η εφαπτομένη ζ της C_f στο σημείο $B(\beta, f(\beta))$ έχει εξίσωση:

$$y - f(\beta) = f'(\beta)(x - \beta) \quad (\zeta)$$

Η ζ διέρχεται από το $\Sigma(2026,0)$ αν και μόνο αν υπάρχει $\beta \in D_\Phi$, ώστε:

$$0 - f(\beta) = f'(\beta)(2026 - \beta) \Leftrightarrow f'(\beta)(\beta - 2026) - f(\beta) = 0$$

Όμως η τελευταία σχέση αληθεύει για $\beta = \xi$, λόγω της (3), άρα η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από το Σ .

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στην C_g άρα $g(1) = 0 \Leftrightarrow a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Επομένως:

$$g(x) = \frac{\ln x}{x - \beta}, \quad 0 < x < \beta$$

Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $D_g = (0, \beta)$ ως πηλίκο συνεχών.

- Αν $\beta > 2$, τότε $2 \in D_g$ και αφού η g είναι συνεχής, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = g(2) = \frac{\ln 2}{2 - \beta} \in \mathbb{R}$$

Όμως τότε, η $x = 2$ δεν είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη, **ΑΤΟΠΟ**. Άρα το $\beta > 2$ απορρίπτεται.

- Αν $\beta = 2$, τότε

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (\ln x) \cdot \frac{1}{x - 2} = -\infty$$

Διότι

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln x = \ln 2 > \ln 1 = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-2) = 0 \text{ και } x-2 < 0 \text{ κοντά στο } 2^-.$$

Άρα $\beta = 2$ και

$$g(x) = \frac{\ln x}{x-2}, \quad 0 < x < 2$$

Δ2.α) Η g είναι παραγωγίσιμη, με

$$g'(x) = \frac{\frac{x-2}{x} - \ln x}{(x-2)^2}, \quad 0 < x < 2$$

Η εφαπτομένη ε της $C_{g^{-1}}$ στο σημείο $B(0, g^{-1}(0))$ έχει εξίσωση:

$$y - g^{-1}(0) = (g^{-1})'(0)(x - 0) \quad (\varepsilon)$$

Πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τα $g^{-1}(0)$ και $(g^{-1})'(0)$.

- $g(1) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = 1$
- Ισχύει ότι $g(g^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} = D_{g^{-1}}$

Επιπλέον οι g^{-1} και g είναι παρ/μες άρα από τον κανόνα της αλυσίδας, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\left(g(g^{-1}(x))\right)' = (x)' \Leftrightarrow g'(g^{-1}(x)) \cdot (g^{-1})'(x) = 1$$

Για $x = 0$ η παραπάνω ισότητα γίνεται

$$g'(g^{-1}(0)) \cdot (g^{-1})'(0) = 1 \Leftrightarrow g'(1) \cdot (g^{-1})'(0) = 1 \Leftrightarrow -1 \cdot (g^{-1})'(0) = 1$$

Άρα $(g^{-1})'(0) = -1$ και η (ε) γίνεται: $y - 1 = -1(x - 0) \Leftrightarrow$

$$y = -x + 1 \quad (\varepsilon)$$

Δ2.β) Η συνάρτηση h είναι παρ/μη στο $\mathbb{R}$, με

$$h'(x) = 2x - e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Η ευθεία ε εφαπτεται στην C_h αν και μόνο αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$, τέτοιο, ώστε:

$$\begin{cases} h'(x_0) = -1 \\ h(x_0) = -x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - e^{-x_0} = -1 \\ e^{-x_0} + x_0^2 = -x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^{-x_0} = 2x_0 + 1 \\ 2x_0 + 1 + x_0^2 = -x_0 + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{-x_0} = 2x_0 + 1 & (1) \\ x_0^2 + 3x_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

Η εξίσωση (2) γίνεται $x_0(x_0 + 3) = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$ ή $x_0 = -3$

- Για $x_0 = -3$ έχουμε (1) $\Leftrightarrow e^3 = -5$ που είναι αδύνατο, άρα το $x_0 = -3$ απορρίπτεται.
- Για $x_0 = 0$ έχουμε (1) $\Leftrightarrow e^0 = 1$ που ισχύει, άρα το $x_0 = 0$ είναι δεκτό και το σημείο επαφής της ε με την C_h είναι το $M(0, h(0)) \equiv M(0, 1)$.

Δ3. Έχουμε

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x-2}, x \in (0, 2)$$

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη, ως πράξεις παραγωγίσιμων, με:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x \ln x}{x-2} \right)' = \frac{(x \ln x)' \cdot (x-2) - x \ln x \cdot (x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{(1 \ln x + x \cdot \frac{1}{x}) \cdot (x-2) - x \ln x \cdot 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{(\ln x + 1) \cdot (x-2) - x \ln x}{(x-2)^2} = \frac{x \ln x - 2 \ln x + x - 2 - x \ln x}{(x-2)^2} = \frac{x - 2 \ln x - 2}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Άρα

$$f'(x) = \frac{x - 2 \ln x - 2}{(x-2)^2}, x \in (0, 2)$$

Για κάθε $x \in (0, 2)$ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$$f'(x) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x - 2 \ln x - 2}{(x-2)^2} = -1 \Leftrightarrow$$

$$x - 2 \ln x - 2 = -(x-2)^2 \Leftrightarrow$$

$$x - 2 \ln x - 2 + x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 3x + 2 - 2 \ln x = 0 \quad (3)$$

Αρκεί να λύσουμε την εξίσωση (3).

Ορίζουμε τώρα την συνάρτηση $k(x) = x^2 - 3x + 2 - 2 \ln x$, $x \in (0, 2)$

Παρατηρούμε ότι $k(1) = 1^2 - 3 + 2 - 2\ln 1 = 0$ άρα το $\rho = 1$ είναι ρίζα της (3).

Υποθέτουμε ότι η (3) έχει δύο τουλάχιστον άνισες ρίζες.

Τότε υπάρχουν $\rho_1, \rho_2 \in (0, 2)$ με: $k(\rho_1) = k(\rho_2) = 0$ και $\rho_1 < \rho_2$.

- Η συνάρτηση k είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, ως άθροισμα συνεχών
- Η συνάρτηση k είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , με:

$$k'(x) = 2x - 3 - \frac{2}{x}$$

- $k(\rho_1) = k(\rho_2)$

Άρα, από το Θεώρημα Rolle, υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\rho_1, \rho_2) \subseteq (0, 2)$, ώστε:

$$k'(\xi) = 0 \Leftrightarrow 2\xi - 3 - \frac{2}{\xi} = 0 \Leftrightarrow 2\xi^2 - 3\xi - 2 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \xi = 2 \text{ ή } \xi = -1/2$$

ΑΤΟΠΟ, αφού $\xi \in (0, 2)$. Άρα η υπόθεση ότι η εξίσωση (3) έχει τουλάχιστον δύο ρίζες είναι ψευδής και επομένως το $\rho = 1$ είναι η μόνη ρίζα της (3).

Δ4. Είναι:

$$1 < x_1 < e < x_2 < e^2 \xLeftrightarrow{\ln \uparrow} \ln 1 < \ln x_1 < \ln e < \ln x_2 < \ln e^2 \Leftrightarrow$$
$$0 < \ln x_1 < 1 < \ln x_2 < 2 \quad (4)$$

Και πρέπει να δείξουμε ότι:

$$\ln x_2 f(\ln x_1) - \ln x_1 f(\ln x_2) < f(\ln x_1) - f(\ln x_2) \quad (5)$$

Για να απλοποιήσουμε την αποδεικτέα, θέτουμε:

$$u_1 = \ln x_1 \text{ και } u_2 = \ln x_2$$

Οπότε η (4) γίνεται:

$$0 < u_1 < 1 < u_2 < 2 \quad (6)$$

Και η (5) γράφεται ισοδύναμα:

$$u_2 f(u_1) - u_1 f(u_2) < f(u_1) - f(u_2) \quad (7)$$

Αρκεί τώρα να αποδείξουμε ότι ισχύει η (7).

Έχουμε:

$$(7) \Leftrightarrow u_2 f(u_1) - f(u_1) < u_1 f(u_2) - f(u_2) \Leftrightarrow (u_2 - 1)f(u_1) < (u_1 - 1)f(u_2)$$

Από την (6) έχουμε: $u_1 - 1 < 0 < u_2 - 1$, επομένως

$$(u_2 - 1)f(u_1) < (u_1 - 1)f(u_2) \Leftrightarrow \frac{f(u_1)}{u_1 - 1} > \frac{f(u_2)}{u_2 - 1} \Leftrightarrow \frac{-f(u_1)}{1 - u_1} > \frac{f(u_2)}{u_2 - 1}$$

Επειδή $f(1) = 0$, η τελευταία γράφεται ισοδύναμα ως:

$$\frac{f(1) - f(u_1)}{1 - u_1} > \frac{f(u_2) - f(1)}{u_2 - 1} \quad (8)$$

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στα $[u_1, 1]$, $[1, u_2]$ ως παρ/μη
- Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στα $(u_1, 1)$, $(1, u_2)$

Άρα, από το ΘΜΤ, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\zeta_1 \in (u_1, 1)$ και ένα τουλάχιστον $\zeta_2 \in (1, u_2)$

τέτοια, ώστε:

$$f'(\zeta_1) = \frac{f(1) - f(u_1)}{1 - u_1} \quad \text{και} \quad f'(\zeta_2) = \frac{f(u_2) - f(1)}{u_2 - 1}$$

Όμως

$$u_1 < \zeta_1 < 1 < \zeta_2 < u_2 \stackrel{f' \downarrow}{\Rightarrow} f'(\zeta_1) > f'(\zeta_2) \Rightarrow \frac{f(1) - f(u_1)}{1 - u_1} > \frac{f(u_2) - f(1)}{u_2 - 1}$$

Άρα ισχύει η (8) και ισοδύναμα η (5).